第一章　实数的概念、性质和运算

一、实数及其运算

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数（正整数、零和负整数）}\\ \text{分数（正分数和负分数）}\end{cases}\\ \text{无理数（即为无限不循环小数）}\end{cases}
$$

整数还有以下分类：

$$
\text{整数}\begin{cases}\text{偶数}\\ \text{奇数}\end{cases}\qquad \text{正整数}\begin{cases}1\\ \text{质数}\\ \text{合数}\end{cases}
$$

1、自然数

我们把 $0,1,2,3,\cdots$ 叫做自然数，自然数的集合用字母 N 表示，即 $N=\{0,1,2,3,\cdots\}$，自然数也叫非负整数，除 0 以外的自然数叫做正整数。自然数具有下面的性质：

（1）自然数 n 的后继数（ n 的后面与它相邻的数）是 $n+1$

（2）两个自然数的和、差的绝对值以及它们的积都是自然数。

南京地址：广州路 37 号江苏科技大厦 2501 室（南大广州路南门斜对面）　http://www.hzmba.org
南京华章整理

2、奇数与偶数

当自然数n_1被自然数$n_2(n_2 \neq 0)$除，所得商仍是一个自然数时，我们就说自然数n_1能被自然数n_2整除，此时称n_1是n_2的倍数；n_2是n_1的约数。

能被 2 整除的自然数都是偶数；不能被 2 整除的自然数都是奇数。偶数都可以表示成$2k$(k为整数）的形式；奇数都可以表示成$2k+1$(k为整数）的形式。

3、素数与和数

若一个正整数只有 1 和它本身两个约数，则称这个正整数为素数（或质数）。若一个正整数有除 1 和自身以外的约数，则称这个正整数为合数。正整数可以分为 3 类：自然数 1，素

数与合数。2 是最小的素数，除 2 以外的素数都是奇数。

大于 1 的任意自然数都可以表示成若干个素因数连乘积的形式，如：$120 = 2^3 \times 3 \times 5$，我们把这个分解得的算式（如$2^3 \times 3 \times 5$）叫做该自然数的素因数分解式。对于给定的大于 1 的自然数，它的素因数分解式是唯一的。

4、公约数和公倍数

（1）公约数

设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n (n \geq 2)$ 是 n 个正整数，若 d 是它们中每一个数的约数，则称 d 为这 n 个整数的公约数（或公因数）。n 个正整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n (n \geq 2)$ 的公约数中最大的一个，叫做这 n 个正整数的最大公约数。若 n 个正整数的最大公约数是 1，则称这 n 个正整数互质。

（2）公倍数

设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n (n \geq 2)$ 是 n 个正整数，若 a 是它们中每一个数的倍数，则称 a 为这 n 个正整数的公倍数。n 个正整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n (n \geq 2)$ 的公倍数中最小的一个，叫做这 n 个正整数的最小公倍数。

5、数的整除

（1）如果 a,b 都能够被 c 整除，那么它们的和与差也能够被 c 整除。

（2）如果 b 与 c 的积能整除 a，那么 b 与 c 都能整除 a。

（3）如果 c 能整除 b，b 能整除 a，那么 c 能整除 a。

（4）如果 b 与 c 都能整除 a，且 b 与 c 互质，那么 b

与 c 的乘积能整除 a 。

（5）零能被任意非零自然数整除；

（6）能被 2 整除的数个位数字是 $0,2,4,6,8$ ；

（7）各位数字之和能被 3（或 9）整除的数必能被 3（或 9）整除；

（8）末两位数能被 4 整除的数必能被 4 整除；

（9）末位数是 0 或 5 的数能被 5 整除；

（10）两个相邻自然数中，必有一个是偶数，另一个是奇数；

6、循环小数转化成分数的方法

记循环小数 $0.135135135\cdots=0.\dot{1}3\dot{5}$

$$0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k=\frac{\overline{a_1a_2\cdots a_k}}{10^k-1}$$

7、有理数和无理数之间的运算规律

有理数 ± 无理数=无理数

非零有理数×无理数=无理数

非零有理数÷无理数=无理数

无理数÷非零有理数 =无理数

二、绝对值、平均值

一）绝对值

1．绝对值的定义：

$$|a|=\begin{cases}a & a\ge 0\\ -a & a<0\end{cases},\quad |a|=\begin{cases}a & a>0\\ -a & a\le 0\end{cases},\quad \sqrt{a^2}=|a|$$

2．几何意义：实数 a 的绝对值就是数轴上与 a 对应的点到原点的距离。

3．绝对值的主要性质：

1）$|a|\ge 0$

2）$|a|=|-a|$

3）$|a+b|\le|a|+|b|$ 等号成立的条件为 $ab\ge 0$

4）$|a-b|\le|a|+|b|$ 等号成立的条件为 $ab\le 0$

5）$|a-b|\geq||a|-|b||$ 等号成立的条件为 $ab\geq 0$

6）$|a|^2=a^2$

4．非负数

（1）$|a|\geq 0$

（2）$a^2\geq 0$

（3）若 $\sqrt{a}$ 有意义，则 $a\geq 0,$ 且 $\sqrt{a}\geq 0$

二）绝对值方程与不等式

1、两类主要绝对值函数

1）、$f(x)=|x-a|+|x-b|$

解题思路：1）主要考虑 $f(x)$ 的最小值，其最小值是 $|b-a|$；

2）当 $a\leq x\leq b$ 时取到最小值；

3）图像特点：中间平，两头翘。

2）、$f(x)=|x-a|-|x-b|$

解题思路：1）主要考虑 $f(x)$ 的最大值和最小值，其最大值是 $|b-a|$，最小值是 $-|b-a|$；

2）图像特点：两头平，中间斜。

2、绝对值方程问题

解题思路：

1）方程 $f(x)=|x-a|+|x-b|=c$ 有解，等价于 $c \geq f(x)_{\min}$

2）方程 $f(x)=|x-a|+|x-b|=c$ 无解，等价于 $c < f(x)_{\min}$

3）方程 $f(x)=|x-a|-|x-b|=c$ 有解，等价于

$$f(x)_{\min} \leq c \leq f(x)_{\max}$$

4）方程 $f(x)=|x-a|-|x-b|=c$ 无解，等价于

$$c < f(x)_{\min} \text{ 或 } c > f(x)_{\max}$$

3、绝对值不等式恒成立问题

解题思路：1）若不等式 $f(x) > A$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min} > A$；

2）若不等式 $f(x) < B$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max} < B$。

4、绝对值不等式能成立问题（有解；解集非空）

解题思路：

1）在区间 D 上存在实数使不等式 $f(x) > A$ 成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max} > A$

2）在区间 D 上存在实数使不等式 $f(x) < B$ 成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min} < B$

5、不等式无解问题

解题思路：

在区间 D 上存在实数使不等式 $f(x) > A$ 无解，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max} \le A$；

在区间 D 上存在实数使不等式 $f(x) < B$ 无解，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min} \ge B$

6、绝对值不等式的解法

1）、基本解法

$\left|f(x)\right|>a \Leftrightarrow f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$（$a>0$），若 $a<0$ 则解集为 R；

$\left|f(x)\right|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$（$a>0$），若 $\boldsymbol{a} \leq 0$ 时，则解集为Φ；

$\left|f(x)\right|>\left|g(x)\right| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$ 注意变形：

$$\left|f(x)\right|>\left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|>0$$

$\left|f(x)\right|<\left|g(x)\right| \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$ 注意变形：

$$\left|f(x)\right|<\left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|<0$$

$\left|f(x)\right|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$

$\left|f(x)\right|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

2）形如 $ax^2+b\left|x\right|+c=0$ 或 $ax^2+b\left|x\right|+c>(<)0$ 的方程或不等式

解题思路：利用 $|x|^2 = x^2$，将 $ax^2 + b|x| + c$ 化成 $a|x|^2 + b|x| + c$

三）、平均值

1．算术平均值：

$$n\text{个数}x_1, x_2, \cdots, x_n\text{的算术平均值为}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

记为：$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

2.几何平均值：

n个正数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的几何平均值为$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$，记为$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

3．算术平均值与几何平均值的关系

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

南京华章整理

第二章 整式和分式

一、熟记一些乘法公式：

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2]$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$$

二、整式的除法运算

多项式 $f(x)$ 除以多项式 $g(x)$，商式是 $q(x)$，余式是 $r(x)$，则

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

若 $r(x)=0$，则称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除，此时

$f(x)=q(x)g(x)$，称 $q(x)$ 和 $g(x)$ 均为 $f(x)$ 的因式。

三、余式定理和因式定理

余式定理　如果 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 除以一次因式 $x-a$ 所得的余式一定是 $f(a)$。

因式定理　如果 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 含有因式 $(x-a)$，即 $f(x)$ 被 $(x-a)$ 整除的充要条件是 $f(a)=0$。

注意：当 $f(x)$ 除以一个一次因式 $x-a$ 时，用一次余式定理或因式定理即可；当 $f(x)$ 除以一个二次因式 ax^2+bx+c 时，一般将 ax^2+bx+c 分解成两个一次因式相乘，再利用两次余式定理或因式定理即可。

第三章　方程与不等式

一、一元二次方程

1、标准形式为：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

2、解法：

① 因式分解法

② 配方法：

③ 公式法：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3、一元二次方程的判别式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

$\Delta=b^2-4ac$

①当Δ>0 时，有两个不相等的实数根。

②当Δ=0 时，有两个相等实数根。

③当Δ<0 时，方程无实根。

注意：在讨论方程$ax^2+bx+c=0$有实数根的情况时，要分$a=0$和$a\neq 0$两种情况讨论。

4、一元二次方程根与系数的关系：

设$ax^2+bx+c=0$的两根为x_1,x_2，则有

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$$

当一元二次方程为$x^2+px+q=0$时，则有

$$x_1+x_2=-p,x_1x_2=q$$

南京华章教育整理

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^{\ 2}}+\frac{1}{x_2^{\ 2}}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}$$

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$$

$$x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2]$$

$$x_1^{\ 3}-x_2^{\ 3}=(x_1-x_2)[(x_1+x_2)^2-x_1\cdot x_2]$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}$$

5、方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的综合讨论

（1）方程有两个正根 $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$

（2）方程有两个负根 $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ x_1+x_2<0\\ x_1x_2>0\end{cases}$

（3）一正一负根 $\begin{cases}\Delta>0\\ x_1x_2<0\end{cases}$ ，特别正根绝对值比负根绝

对值大时，$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2>0\\x_1x_2<0\end{cases}$

负根绝对值比正根绝对值大时，$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2<0\\x_1x_2<0\end{cases}$

（4） $f(x)=ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的实根分布

① $x_1<x_2<k \Leftrightarrow \begin{cases}f(k)>0\\-\dfrac{b}{2a}<k\\\Delta>0\end{cases}$；② $x_1>x_2>k \Leftrightarrow \begin{cases}f(k)>0\\-\dfrac{b}{2a}>k\\\Delta>0\end{cases}$

③ $x_1<k<x_2 \Leftrightarrow f(k)<0$

④ $k_1<x_1<x_2<k_2 \Leftrightarrow \begin{cases}f(k_1)>0\\f(k_2)>0\\k_1<-\dfrac{b}{2a}<k_2\\\Delta>0\end{cases}$

⑤ $k_1 < x_1 < k_2 < x_2 < k_3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(k_1) > 0 \\ f(k_2) < 0 \\ f(k_3) > 0 \end{cases}$

6、以 x_1, x_2 两数为根的一元二次方程为 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

7、若实数 $x_1 \neq x_2$，且满足 $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} (a \neq 0)$，则 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 两个不相等的实数根。

8、高次方程或特殊方程的求解

一些高次方程、指数方程、对数方程都可通过换元化为一元二次方程求解，注意换元时成立的条件，如 $x^2 + 1 = t \geq 1, \sqrt{f(x)} = t \geq 0, a^m = t > 0(a > 0)$ 等。

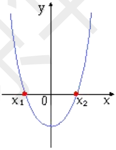
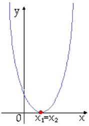
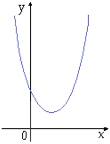
二、一元二次不等式

1）一元二次不等式的解法

南京华章整理

考题中一元二次不等式通常与其他的知识结合起来，解题时要特别注意题中的隐含条件，如函数的定义域、绝对值非负等等，并且要熟练不等式解集的结构。

求解一元二次不等式借助二次函数图像最为简便，做法是先确定二次项系数正负号，其次再研究判别式 Δ 。二次函数，一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系表：

判别式	△>0	△=0	△<0
二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$ 的图象			

<table>
<tr><td colspan="2">一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根</td><td>有两个不相等的实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$</td><td>有两个相等的实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$</td><td>没有实根</td></tr>
<tr><td rowspan="2">不等式解集</td><td>$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$</td><td>$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$</td><td>$\left\{x\mid x\in R且x\neq -\frac{b}{2a}\right\}$</td><td>实数集R</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$</td><td>$\{x\mid x_1<x<x_2\}$</td><td>ϕ</td><td>ϕ</td></tr>
</table>

二次项系数是负数（即 a＜0）的不等式，可以先化成二次项系数是正数的不等式，再求它的解集.

三、分式不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)g(x)<0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases};$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

四、无理不等式

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

五、已知一元二次不等式的解集求不等式中系数的参数以及求另外不等式的解

这类题主要是利用不等式的解与一元二次方程根的关

系，再利用韦达定理反求参数。

六、不等式对任意实数 x 恒成立问题

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 对任意一切实数 x 恒成立的充要条件是：

$\begin{cases} a=b=0 \\ c>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 对任意 x 都成立的条件是

$\begin{cases} a=b=0 \\ c<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

七、应用题

1、总量为 1 的工程问题

有关计算单位时间（1 天、1 小时、1 分钟）内的工作量（即工作效率），以及完成一定的工作量所需要的时间（简称

工作时间），与在一定时间内所完成的工作量（简称工作总量）的问题叫做工程问题。

有关工程问题的关系式有：

工作效率×工作时间 ＝ 工作总量

工作总量÷工作时间 ＝ 工作效率

工作总量÷工作效率 ＝ 工作时间

在问题中，若对于工作总量与工作效率没有说明具体的数量，那末，我们通常把工作总量看作“1”。

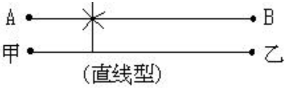
2、距离固定的运动问题

解题提示：根据题意画图，找等量关系（一般是时间和路程），列方程求解。

相遇问题：

类型一：相向直线运动

C



等量关系：$S_{甲} + S_{乙} = S$，$\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}} = \dfrac{AC}{BC}$ (时间相同)

此类问题主要抓住运动路程，速度和时间之间的关系，在实际试题中要注意：

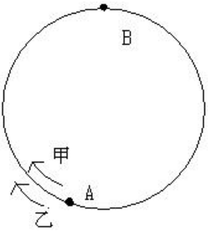
1）若两个物体相向而行，则相对速度为两速度之和；

2）若两个物体同向而行，则相对速度为两速度之差；

3）两物体在同一时间行走路程与速度成正比关系，而在行驶同路程时所用时间与两速度成反比关系。

类型二： 圆周运动

1）同向

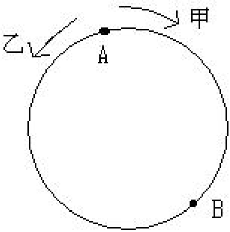


等量关系：（经历时间相同）

$S_{甲}-S_{乙}=S$（S 代表周长，相遇时 S 甲代表甲走的路程，S 乙代表乙走的路程）

甲乙每相遇一次，甲比乙多跑一圈，若相遇n次，则有$S_{甲}-S_{乙}=n\cdot S$

2）逆向



等量关系：$S_{甲}+S_{乙}=S$（S 代表周长，S 甲代表甲走了的路程，S 乙代表乙走了的路程）

即：每相遇一次，甲与乙路程之和为一圈，若相遇n次有$S_{甲}+S_{乙}=n\cdot S$

3 浓度配比问题

溶液量=溶质量+溶剂量

浓度=溶质量÷溶液量

第四章　数　列

一、等差数列

	等　差　数　列
定义	① $a_{n+1}-a_n=d$　② $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$
通项公式	① $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)=kn+b$ ② $a_n=a_m+(n-m)d \Rightarrow d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$
增减性	① $d>0 \Leftrightarrow$ 递增　② $d=0 \Leftrightarrow$ 常数列 ③ $d<0 \Leftrightarrow$ 递减
等差中	A 为 a,b 的等差中项 $\Leftrightarrow 2A=a+b$

南京华章整理

项	
前 n 项和	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ **（重要）** $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n=An^2+Bn$ ① 当 $a_1>0$ 且 $d<0$ 时，S_n 有最大值；通过 $\begin{cases}a_n\geq 0\\a_{n+1}\leq 0\end{cases}$ 解得 n 的范围 ② 当 $a_1<0$ 且 $d>0$ 时，S_n 有最小值； 通过 $\begin{cases}a_n\leq 0\\a_{n+1}\geq 0\end{cases}$ 解得 n 的范围

南京华章整理

性质	① $\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow a_n = kn + b$（k,b 为常数） $\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow s_n = An^2 + Bn$（A,B 为常数） 三个数$a$, b, c为等差数列$\Leftrightarrow 2b = a + c$ ② 当 m+n=p+q 时，$a_m + a_n = a_p + a_q$ $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$（m, n 为同奇或同偶） ③ 若$s_n$为等差数列$\{a_n\}$前 n 项和，则$s_n$，$s_{2n} - s_n$，$s_{3n} - s_{2n}$也成等差数列，公差为$n^2 d$

南京华章整理

性质	④ 若等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$前 n 项和分别为 S_n, T_n，则$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$ ⑤ 当等差数列$\{a_n\}$的项数 n 为偶数时，则 $S_{偶}-S_{奇}=\dfrac{n}{2}d$；当等差数列$\{a_n\}$的项数 n 为奇数时，则$S_{奇}-S_{偶}=a_{中}, \dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{n+1}{n-1}$ ⑥ 等差数列解题设元常用方法 在已知三个数成等差数列时，可设这三个数依次为 $a-d, a, a+d$； 在已知四个数成等差数列时，可设这四个数依次为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$

南京华章整理

二、等比数列

	等 比 数 列
定义	① $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ ② $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$（$a_n,a_{n+1},a_{n+2}\neq 0$）
通项公式	① $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=k\cdot q^n$ ② $a_n=a_m\cdot q^{n-m}\Rightarrow q^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$
增减性	① $a_1>0,q>1$ 或 $a_1<0,0<q<1\Leftrightarrow$ 递增 ② $q=1\Leftrightarrow$ 常数列 ③ $a_1>0,0<q<1$ 或 $a_1<0,q>1\Leftrightarrow$ 递减
前 n 项和	$S_n=\begin{cases} na_1 & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q\neq 1\end{cases}$ 若 $\lvert q\rvert<1$ 则所有项的 $S=\frac{a_1}{1-q}$
等比	G 为 a,b 的等比中项 $\Leftrightarrow G^2=ab$

中项	

南京华章整理

性质	① $\{a_n\}$ 为等比数列 $\Leftrightarrow a_n = kq^n$ （$k,q \neq 0$ 为常数） $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $q \neq 1$ $\Leftrightarrow S_n = b \cdot q^n + c, b+c=0$（$b,c$ 为常数） 三个不等于零的数 a,b,c 为等比数列 $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$ ② 当 $m+n=p+q$ 时，$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ $a_m + a_n = (a_{\frac{m+n}{2}})^2$（$m,n$ 为同奇或同偶） ③ 若 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 也成等比数列，公比为 q^n ④ 等比数列解题设元常用方法 在已知三个数成等比数列时，可设这三个数依次为 $\frac{a}{q}, a, aq$；在已知四个数成等比数列时，可设这四个数依次为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3$

南京华章整理

三、特殊数列求通项

1、形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 的形式采用累加法

$a_{n+1}=a_n+f(n)\Rightarrow a_{n+1}-a_n=f(n)$，从而

$a_2-a_1=f(1),a_3-a_2=f(2),\cdots,a_n-a_{n-1}=f(n-1)$，两边分别相加即可求解

2、形如 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ 的形式采用叠乘法

$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，从而

$\dfrac{a_2}{a_1}=f(1),\dfrac{a_3}{a_2}=f(2),\cdots,\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n-1)$，两边分别相乘得

$\dfrac{a_n}{a_1}=f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n-1)$

3、形如 $a_{n+1}=pa_n+q$ 的形式，化为等比数列

设 $a_{n+1}+m=p(a_n+m)\Rightarrow a_{n+1}=pa_n+(p-1)m$，令 $(p-1)m=q$ 解出 m，从而数列 $\{a_n+m\}$ 为等比数列

4、已知 S_n 求通项 a_n

$$a_n = \begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

四、特殊数列求和

1、$\{a_n + b_n\}$ 型，其中 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列

解题思路：分别对 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 求和，再相加

2、$\{a_n \cdot b_n\}$ 型，其中 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列

解题思路：错位相减

3、裂项相消法

解题思路：将数列的通项分解相减，使之消去一些项，然后再求和。

南京华章整理

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$$

$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})]$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

五、数列中的应用题

解题思路：关键是把实际问题转化为数列模型，要分清该数列是等差数列还是等比数列，是求 S_n 还是求 a_n。一般情况下，增或减的量是具体量时，应该用等差数列公式；增或减的量是百分数时，应该用等比数列有关公式。若是等差数列，则增或减的量就是公差；若是等比数列，则用 1 加或减这个百分数才是公比。

第五章　排列、组合与概率初步

一、加法原理与乘法原理

1、加法原理

做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

2、乘法原理

做一件事，完成它需要 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

二、排列与组合

1、排列的定义

从 n 个不同元素中，任取 $m(m \le n)$ 个元素（被取出的元素各不相同），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

2、排列数的定义

从 n 个不同元素中任取 $m(m \le n)$ 个元素的所有排列数的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 P_n^m 表示。

3、排列数公式

（1）当 $m<n$ 时，排列称为选排列，排列数为 $P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)]$

（2）当 $m=n$ 时，排列称为全排列，排列数为 $P_n^n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

4、组合的定义

从 n 个不同元素中，任取 $m(m \le n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

5、排列数的定义

从 n 个不同元素中任取 $m(m \le n)$ 个元素的所有组合

的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示。

6、排列数公式

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

7、组合数的两个性质

（1）$C_n^m = C_n^{n-m}$

（2）$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

三、排列、组合问题的求解应掌握的基本方法与技巧

1、特殊元素优先安排

2、排列、组合混合的问题先选后排

3、相邻问题捆绑法（先考虑受限制元素）

南京华章整理

4、不相邻问题插空处理（先考虑不受限制元素）

5、分排问题直排处理

6、至多至少问题间接法

7、数量不大问题穷举法

8、分组问题

四、常见考试题型

1、“在位”与“不在位”

（1）某元素必在某位置

解题思路：某个（或几个）元素要排在指定位置，可先排这个（或几个）元素，再排其他元素。

（2）某元素不在某位置

解题思路：先把所有元素全部排列，在减去某个（或几个）元素要排在指定位置的排法。

2、相邻与不相邻

（1）k 个元素在一起的排列

解题思路：捆绑法

（2）两组元素在一起全排列，其中一组的元素互不相邻

解题思路：先插空再排列

4、标号排位问题

解题思路：这类题的解答程序是，先把元素排到指定号码的位置上，可先把某个元素按规定排入，第二步再排另一个元素，如此继续下去，依次即可完成。

五、排数问题

解题思路：主要考虑特殊元素和特殊位置，一般先考虑个位，再考虑首位。

概率初步

一、互斥事件概率的计算

“A与B至少有一个发生”表示为$A+B$或

$A\bigcup B$，若A与B互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)$

二、对立事件概率的计算

事件 A 与它的对立事件 $\overline{A}$ 的概率和为 1，即 $P(A)=1-P(\overline{A})$，在求解“至少”或“至多”类型的概率问题时常用此关系式。

三、古典概率

1、摸球问题

设口袋中有 $\alpha+\beta$ 个球，其中 α 个白球，β 个黑球。从中取出 $a+b$ 个球，观察它们的颜色，则其中恰有 a 个白球和 b 黑球的概率为：$P=\dfrac{C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$

2、分房问题

掌握以下三种类型：

将 n 个人等可能地分配到 $N(n\le N)$ 间房中去，试求下列事件的概率：

$A=$“某指定的 n 间房中各有 1 人”；

$B=$“恰有 n 间房各有 1 人”；

$C=$“某指定的房中恰有$m(m\le n)$人”。

解：将n个人等可能地分配到$N(n\le N)$间房中的每一间去，共有N^n种方法。

对固定的某n间房，第一个人可分配到其中的任一间，因而有n种方法，第2个人分配到余下的$n-1$间中的任一间，有$n-1$种分法，依次类推，得到事件A包含的基本事件数目为$n!$，于是有$P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$

对于事件B，由于“恰有n间房”可自N间房中任意选取，且并不是指定的，因此有C_N^n种选发，对于每一种选出的n间房，按上面的分析可知，事件B共含$C_N^n n!$个基本事件，

故$P(B)=\dfrac{C_N^n n!}{N^n}$

对于事件C，由于恰有m人”可自n个人中任意选出，并不是指定的，因此有C_n^m种，而其余$n-m$个人可以任意分

配到其余$N-1$间房中，有$(N-1)^{n-m}$种分法，因此事件C包含的基本事件数为$C_n^m(N-1)^{n-m}$, 于是

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m(\frac{1}{N})^m(1-\frac{1}{N})^{n-m}$$

3、抽签问题

在无放回取球模型中，如果是逐个取出k个球，则第k次取到白球的概率均为$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, 与$k$无关。

四、独立事件

1、“A与B同时发生”表示为AB或$A\bigcap B$

2、A与B独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

3、若三个事件A,B,C相互独立，则$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

4、如果事件A,B相互独立，则$A,\overline{B}$；$\overline{A},B$；$\overline{A},\overline{B}$每一对事件都相互独立

5、在n重贝努里试验中，事件A恰好发生$k(0\le k\le n)$次

的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

注意：

1）“恰有 k 次发生”和“某指定的 k 次发生，其余次试验不发生”的区别。前者的概率为 $P=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，后者的概率为 $p^k(1-p)^{n-k}$；

2）“事件 A 恰好发生 k 次”和“事件 A 恰好发生 k 次，且最后一次事件 A 发生”的区别。前者的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，后者的概率为 $C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\cdot p$。

第六章 平面几何、解析几何与立体几何

一、两条直线的位置关系

1、两条直线相交

两条直线 l_1 与 l_2 相交于点 O，成两组对顶角 $\angle1,\angle3$ 和 $\angle2,\angle4$，如图 6-1 所示，则有 $\angle1=\angle3,\angle2=\angle4$

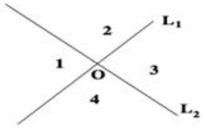


图 6—1

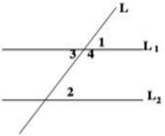


图 6—2

2、两条直线平行

如图 6-2 所示，$l_1 // l_2$，直线 l 与 l_1,l_2 均相交，则

$\angle1=\angle2$（同位角相等）

$\angle3=\angle2$（内错角相等）

$\angle1=\angle3$（对顶角相等）

$\angle2+\angle4=180^\circ$（同旁内角互补）

二、三角形

1、三角形边角之间的关系

1）三角形的内角和等于 180°；

2）三角形的一个外角等于和它不相邻的两内角之和；如图 6-3 中，$\angle\alpha=\angle BAC+\angle B$

3）三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角；

4）三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边；

5）三角形的面积：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\bullet AH$，BC为底，AH为高

2、三角形的分类

按边分类：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{不等边三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底与腰不等的三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$

按角分类：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{斜三角形}\begin{cases}\text{锐角三角形}\\ \text{钝角三角形}\end{cases}\\ \text{直角三角形}\end{cases}$$

3、三角形的中位线

三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半。

4、直角三角形

①直角三角形的两锐角互余；

②直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方，如图 6-4 中 $a^2+b^2=c^2$；

③直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半，如图 6-4 中，D 为 BA 的中点，有 $DA=DB=DC$；

④直角三角形中，30° 锐角所对的直角边等于斜边的一半，如图 6-5 中，$\angle A=30^\circ$，则 $a=\dfrac{1}{2}c$，此时直角三角形的三边之比为 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，

⑤直角三角形中，如果有一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的锐角等于 30°；

⑥等腰直角三角形，如图 6-6 所示，$\angle A=\angle B=45^\circ$，它的三边之比为 $a:b:c=1:1:\sqrt{2}$

⑦ $S_{Rt\Delta ABC}=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab$，其中 a,b 为两直角边，c 为斜边，h 为斜边上的高；

⑧ $Rt\Delta ABC$ 的内切圆的半径 $r=\frac{a+b-c}{2}$，外接圆的半径 $R=\frac{c}{2}=$ 斜边上的中线的一半。

5、等腰三角形

①具有三角形的一切性质

②两底角相等（“等边对等角”）

③顶角的平分线，底边的中线，底边上的高互相重合（“三线合一”），如图 6-7 所示。

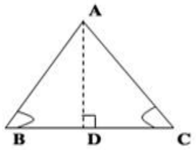


图 6-7

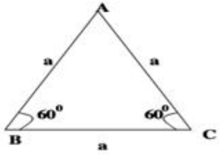


图 6-8

3）等边三角形（如图 6-8 所示）

①定义：三条边都相等的三角形叫做等边三角形

②性质：具有等要三角形的一切性质

此外：等边三角形的三个角都相等，都等于 60°

③判定：三个角都相等的三角形是等边三角形；有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形。

6、全等三角形

1）定义：能完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

2）性质：对应边相等，对应角相等，对应角平分线、中线、高相等，周长、面积相等。

3）判定：边角边公理、角边角公理、角角边定理、

边边边公理、斜边直角边定理。

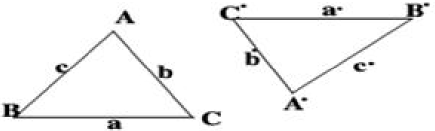
7、相似三角形

相似三角形的对应角相等，对应线段成比例，面积比等于相似比的平方。

如图 6-10 所示，$\angle A = \angle A^{'}, \angle B = \angle B^{'}, \angle C = \angle C^{'}$,

且 $\frac{AB}{A^{'}B^{'}} = \frac{AC}{A^{'}C^{'}} = \frac{BC}{B^{'}C^{'}}$， $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A^{'}B^{'}C^{'}}} = (\frac{AB}{A^{'}B})^{2}$

下图 6—10



三、四边形

1、平行四边形

定义:两组对边分别平行的四边形,如图 6-11 所示左边图。

性质：对边相等、对角相等、对角线互相平分。

周长与面积：$l = 2(a+b), S = bh$

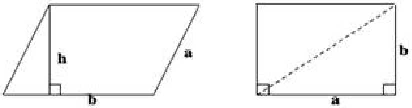


图 6—11

2、矩形

定义：有一个角是直角的平行四边形，如图 6-11 所示右边的图形。

性质：具有平行四边形的一切性质，对角线相等。

周长与面积：$l = 2(a+b), S = ab$，对角线长度为 $\sqrt{a^2+b^2}$

3、菱形

定义：有一组邻边相等的平行四边形。

性质：具有平行四边形的一切性质，四条边都相等，对角线互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角。

面积：面积等于对角线乘积的一半。

4、正方形

定义：有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形。

性质：具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质，四条边都相等，四个角都是直角，对角线互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角。

5、梯形

1）定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫梯形。

等腰梯形：两腰相等的梯形。

直角梯形：一腰垂直于底的梯形。

2）中位线与面积

如图 6-12 所示，设梯形的上底为 a, 下底为 b，高为 h，中位线为 MN，于是 $MN=\frac{1}{2}(a+b), S=\frac{1}{2}(a+b)h$

四、圆

与圆有关的计算公式：如图 6-13 所示

1、圆周长 $c=2\pi r$

2、弧长 $l=\dfrac{n\pi r}{180}$

3、圆的面积 $S=\pi r^2$

4、扇形面积 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi r^2}{360}=\dfrac{1}{2}lr$，其中 n 为对应的圆心角。

解析几何

一、解析几何基本公式的应用

1、两点间距离公式

设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

2、有向线段的定比分点公式

设点 $P(x,y)$ 为有向线段 $\overline{AB}$ 的定比分点，且定比为 λ，即

$\frac{AP}{PB}=\lambda$（AP,PB 分别为有向线段 $\overline{AP},\overline{PB}$ 的数量），起点 $A(x_1,y_1)$,终点 $B(x_2,y_2)$，则 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

特殊情况：中点公式

当 $\lambda=1$ 时，则 $P(x,y)$ 为线段 AB 的中点，于是

$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}$

3、直线斜率的计算公式

设直线 l 上的两个点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$

直线 $Ax+By+C=0(B\neq 0)$ 的斜率为 $k=-\frac{A}{B}$

注意：1）上述两个公式都不包括直线垂直于 x 轴的情况

2）直线的倾斜角与斜率的变化关系：当倾斜角 α 小于

南京华章整理

90°时，斜率k随着倾斜角α的增大而增大；当倾斜角α大于90°时，斜率k随着倾斜角α的增大也增大。

3）直线越“陡”，斜率的绝对值越大。

4、点到直线的距离公式

设直线l的方程为$Ax+By+C=0$，点$P(x_0,y_0)$到直线l的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

5、$l_1:Ax+By+C_1=0, l_2:Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$，则这两条平行直线间的距离公式是$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

二、求直线方程

解题思路：根据题干要求采取合适的直线方程的形式

1、点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$，其中直线过点

$P(x_0,y_0)$，斜率为 k

2、斜截式：$y=kx+b$，其中直线斜率为 k，在 y 轴上截距为 b

3、两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-x_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，直线过两点 $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$

4、截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，其中直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a、b $(a,b\neq 0)$

注意：截距不是距离，在遇到直线方程在两个坐标轴上截距的关系时要考虑直线过原点的特殊情形。

5、一般式：$Ax+By+C=0$（A,B 不全为零）

注意：要会把一般式化成斜截式或截距式

三、两条直线的位置关系

1）两条直线的相交

直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0,l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$ （Ⅰ）有惟一一组实数解，其中它们的交点坐标为方程组（Ⅰ）的解。

2）两条直线平行和垂直

若直线 $l_1: y=k_1x+b_1, l_2: y=k_2x+b_2$，

则① $l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$ ② $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$

若直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，且 A_1, A_2, B_1, B_2 都不为零，则

① $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$；② $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

3）两条直线的夹角公式

若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，两直线夹角θ

则 $\mathbf{\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|}$

四、直线过定点问题

解题思路：将题干所给的直线方程变成两条直线相交，交点就是所求的定点。

五、对称问题

1、对称点

（1）两点 A,B 关于点 M 对称 $\Leftrightarrow$ M 为线段 AB 的中点

（2）两点 A,B 关于直线 l 对称 $\Leftrightarrow$ 直线 l 为线段 AB 的垂直平分线

解题思路：设 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0\ (k\neq 0)$ 的对称点为 $B(x,y)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{B}{A}\\ A\dfrac{x+x_0}{2}+B\dfrac{y+y_0}{2}+C=0\end{cases}$$

，解出 x,y，可得到 $B(x,y)$。

记住一些特殊情况：

设 $A(x_0,y_0)$ 为平面上的一点，则

南京地址：广州路 37 号江苏科技大厦 2501 室（南大广州路南门斜对面） http://www.hzmba.org

①点 A 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x_0,-y_0)$；

②点 A 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x_0,y_0)$；

③点 A 关于直线 $y=x$ 对称的点的坐标为 (y_0,x_0)；

④点 A 关于直线 $y=-x$ 对称的点的坐标为 $(-y_0,-x_0)$；

2、对称直线

（1）两直线 l_1,l_2 关于点 $A(x_0,y_0)$ 对称 $\Leftrightarrow \begin{cases} l_1 // l_2 \\ \text{点}A\text{到直线}l_1\text{与直线}l_2\text{的距离相等} \end{cases}$

（2）两直线 l_1,l_2 关于直线 l 对称 $\Leftrightarrow$ 直线 l_1 上任一点关于直线 l 的对称点都在直线 l_2 上

记住一些特殊情况：

设 $f(x,y)=0$ 为平面上一直线，则

① $f(x,y)=0$ 关于 x 轴对称的点的坐标为

$f(x,-y)=0$；

② $f(x,y)=0$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $f(-x,y)=0$；

③ $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x$ 对称的点的坐标为 $f(y,x)=0$；

④ $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=-x$ 对称的点的坐标为 $f(-y,-x)=0$

3、反射问题

解题思路：反射问题转化为直线对称问题，即入射光线与反射光线关于已知直线对称。

六、圆的方程

1、标准方程：$x^2+y^2=r^2$，圆心为$(0,0)$，半径为r；$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心为(a,b)，半径为r。

2、一般方程：

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$经过配方得

$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程为圆的一般方程，圆心为 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$；

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程为一个点 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程不表示任何图形

3、圆的直径式方程

以端点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 为直径的圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

七、点、直线、圆与圆的位置关系

1、点与圆有三种位置关系：点在圆内，圆上，圆外。

点 $P(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系判断

设点 P 到圆心的距离为 $d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，

则

（1）$d>r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外

（2）$d=r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上

（3）$d<r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内

2、直线与圆的位置关系

直线 $l: Ax+By+C=0$，圆：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的半径为 r，圆心 $M(a,b)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则

（1）直线 l 与圆 M 相交 $\Leftrightarrow d<r$

（2）直线 l 与圆 M 相切 $\Leftrightarrow d=r$

（3）直线 l 与圆 M 相离 $\Leftrightarrow d>r$

注意：当直线与圆相交求弦的长度时，一般要利用“垂

径定理”

3、两个圆的位置关系

设两圆的半径分别为$R,r(R\ge r)$，圆心距为d，则

（1）两圆外离$\Leftrightarrow d>R+r\Leftrightarrow$4 条公切线

（2）两圆外切$\Leftrightarrow d=R+r\Leftrightarrow$3 条公切线

（3）两圆相交$\Leftrightarrow R-r<d<R+r\Leftrightarrow$2 条公切线

（4）两圆内切$\Leftrightarrow d=R-r\Leftrightarrow$1 条公切线

（5）两圆内含$\Leftrightarrow 0<d<R-r\Leftrightarrow$0 条公切线

注意：记住两个重要结论

1、两圆相交弦所在直线方程的求法：两个圆的方程相减得相交弦所在直线方程；

2、已知圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则过圆上一点$P(x_0,y_0)$的切线方程为

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$$

八、解析几何中的最值问题

1、已知一直线方程，求 x^2+y^2 或 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值

解题思路：$x^2+y^2=(x-0)^2+(y-0)^2$，从而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 表示点 $P(x,y)$ 与原点 $O(0,0)$ 之间的距离 $|OP|$

2、已知一直线方程，求 $a^x+b^y(a>0,b>0)$ 的最小值

解题思路：利用 $a^x+b^y\geq 2\sqrt{a^x\cdot b^y}$

3、已知一个圆的方程，求形如 $\dfrac{y-b}{x-a}$ 形式的最大值与最小值

解题思路：设 $\dfrac{y-b}{x-a}=k$，从而 $y-b=k(x-a)$，即表示过点 (a,b) 斜率为 k 的直线方程，当直线与圆相切时，k 取得最大值与最小值。

4、已知一个圆的方程，求形如 $ax+by$ 形式的最大值与最小值

南京地址：广州路 37 号江苏科技大厦 2501 室（南大广州路南门斜对面） http://www.hzmba.org

解题思路：设$ax+by=m$，当直线$ax+by=m$与圆相切时，m取得最大值与最小值。

5、已知平面内两点A,B，求$|PA|+|PB|$的最小值（其中P为x轴上一点）

解题思路：1）若A,B两点在x轴两侧，则$|AB|$就是$|PA|+|PB|$的最小值，其中P点为A,B两点所在直线与x轴的交点；

2）若A,B两点在x轴同侧，作其中一点比如B关于x轴的对称点B'，则$|AB'|$就是$|PA|+|PB|$的最小值，其中P点为A,B'两点所在直线与x轴的交点。

6、已知平面内两点A,B，求$|PA|-|PB|$的绝对值的最大值（其中P为x轴上一点）

解题思路：1）若A,B两点在x轴同侧，则$|AB|$就是$|PA|-|PB|$的绝对值的最大值，其中P点为A,B两点所在直

线与 x 轴的交点；

2）若 A,B 两点在 x 轴两侧，作其中一点比如 B 关于 x 轴的对称点 B'，则 $\left|AB'\right|$ 就是 $|PA|-|PB|$ 的绝对值的最大值，其中 P 点为 A,B' 两点所在直线与 x 轴的交点。

立体几何

（一）长方体（图 6—12）

设三条棱长为 a,b,c，

（1）体积 $V=abc$；

（2）表面积 $F=2(ab+bc+ca)$；

（3）体对角线 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

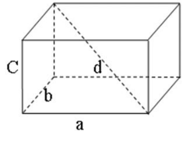


图 6—12

（二）直圆柱体（轴截面均为矩形，图 6—13）

设高为 h，底面半径为 r，

（1）体积 $V=\pi r^2 h$；

（2）侧表面积 $S=2\pi rh$；

（3）表面积 $F=2\pi rh+2\pi r^2$。

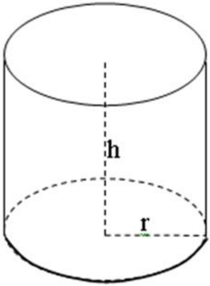


图 6—13

（三）圆锥体（轴截面均为等腰三角形，图 6—14）

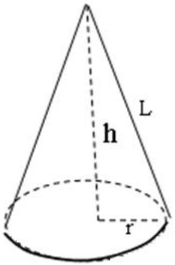
设底面半径为 r，高 h，母线 l，

（1）体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$；

（2）母线 $l=\sqrt{r^2+h^2}$；

（3）侧面积 $S=\pi rl=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$；

（4）表面积 $F=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$



南京华章教育整理

图 6—14

（四）球（截面是圆，图 6—15）

设半径为 r，

（1）体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^{3}$；

（2）表面积 $S=4\pi r^{2}$．

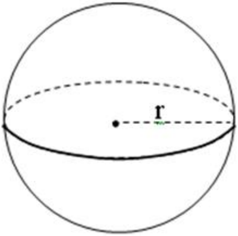


图 6—15

南京地址：广州路 37 号江苏科技大厦 2501 室（南大广州路南门斜对面）　http://www.hzmba.org